

# PROBABILITĂȚI

- » Experiment aleator
- » Definiția clasică a probabilității
- » Spațiul fundamental de evenimente
- » Independența a două evenimente
- » Probabilități condiționate
  - > Exemple medicale (Riscul relativ, Se, Sp, VPP, VPN, etc.)

## Cuprins

- » La aruncarea cu moneda avem două rezultate posibile (capul sau pajura) asociate cu o probabilitate specifică (ex. 0,5)
  - > Testul: aplicarea unui experiment
  - > Evenimentul: rezultatul testului
  - > Evenimentul aleator: evenimentul care se obține la aplicarea unui singur test
  - > Spațiu de evenimente: {cap, pajura}



## Evenimentul aleator

- » Colecție a tuturor rezultatelor posibile ale unui test
  - > Dacă o familie are 2 copii, care este spațiul de evenimente pentru genul (F/M) acestor copii?
  - >  $S = \{FF, FM, MF, MM\}$
- » Distribuția de probabilitate = listă a tuturor rezultatelor posibile ale unui spațiu de eveniment și probabilitățile asociate ale acestora
  
- » La o singură aruncare a unei monede (Cap = C, Pajură = P)
  - >  $S = \{C, P\}$
  - >  $P(C) = 0,5$
  - >  $P(P) = 0,5$
- » La aruncarea de două ori a unei monede (Cap = C, Pajură = P)
  - >  $S = \{CC, CP, PC, PP\}$
  - >  $P(CC) = 0,25$
  - >  $P(CP) = 0,25$
  - >  $P(PC) = 0,25$
  - >  $P(PP) = 0,25$

- » Evenimente complementare = două evenimente mutual exclusive a căror sumă de probabilități este egală cu 1
- »  $S = \{C, P\} - P(C)+P(P) = 0,5+0,5 = 1$
- »  $S = \{CC, CP, PC, PP\} - P(CC)+P(\text{nonCC}) = 0,25+0,75 = 1$
- » Evenimente disjuncte – spațiul evenimentului poate avea mai mult de 2 rezultate posibile
- » Evenimente complementare – spațiul evenimentului poate avea doar 2 rezultate posibile

- » Probabilitatea = o măsură a șansei de realizare a unui eveniment
- »  $\Pr(A) \in [0, 1] / 0 \leq P \leq 1$
  
- » Fie A un eveniment:
  - >  $\Pr(A)$  = probabilitatea evenimentului A
  - > Dacă evenimentul este o certitudine:  $\Pr(A) = 1$
  - > Dacă evenimentul este imposibil de realizat:  $\Pr(A) = 0$
- » Dacă un eveniment A se poate realiza în S probe dintr-o serie de n încercări echiprobabile, atunci probabilitatea evenimentului A este dată de numărul de cazuri favorabile raportat la numărul de cazuri posibile:

$$\Pr(A) = (\text{nr cazuri favorabile}) / (\text{nr cazuri posibile})$$

# Probabilitatea

- » S-a realizat un studiu pe un eșantion de 7782 subiecți din țări și s-au obținut următoarele rezultate:
  - > 36,2% din populația lumii au fost de acord cu următoarea propoziție “Bărbații ar trebui să aibă mai mult dreptul la un loc de muncă decât femeile.”
  - > 13,8% din persoanele incluse în studiu aveau studii universitare
  - > 3,6% din persoanele incluse în studiu îndeplineau simultan cele două criterii.

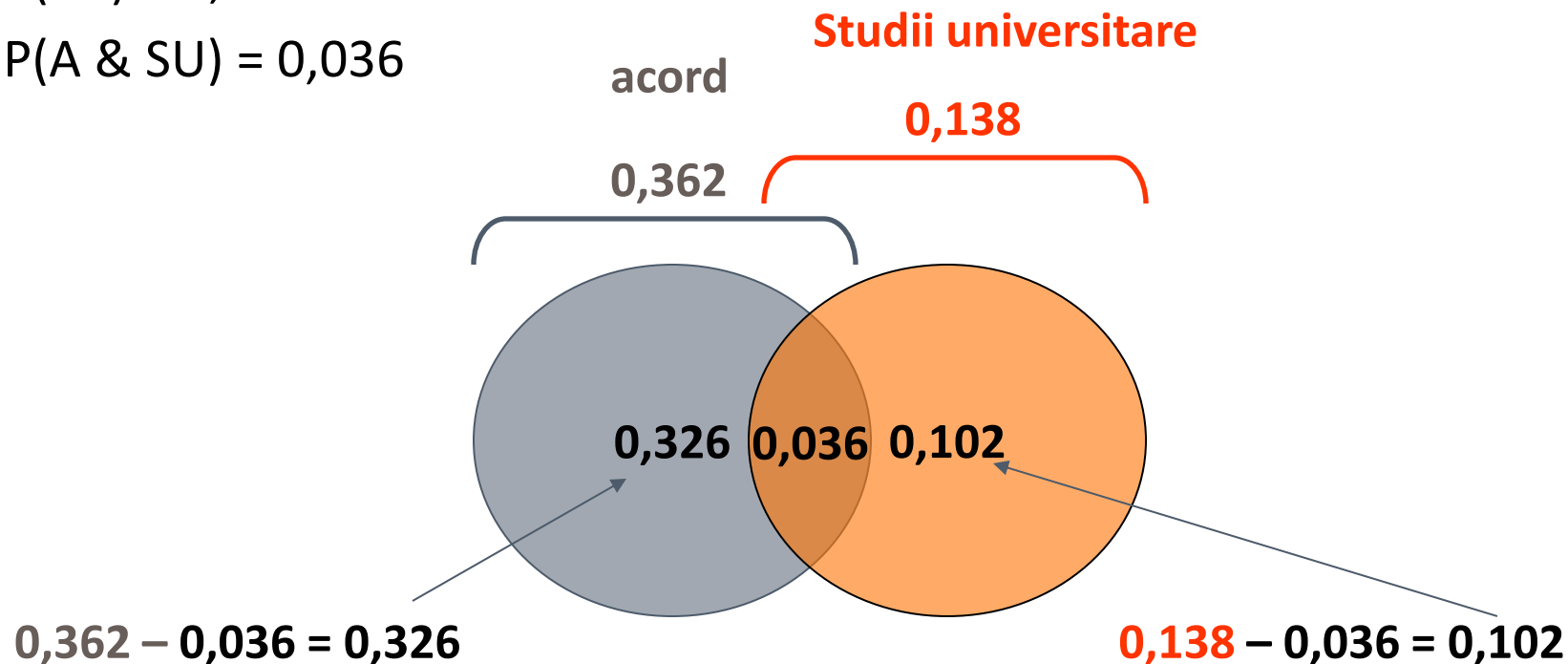
$$P(\text{acord}) = 0,362 - P(\text{SU}) = 0,138 - P(\text{acord} \& \text{SU}) = 0,036$$

- » Evenimnetele “acord” (A) și “studii superioare” (SU) sunt independente?
- »  $P(A \text{ și } SU) = 0,036 \neq 0 \rightarrow$  dependente

$$P(A) = 0,362$$

$$P(SU) = 0,138$$

$$P(A \& SU) = 0,036$$



## Probabilități: diagrama Venn



$\cup$  (reuniune) = SAU  
 $\cap$  (intersecție) = ȘI

$$P(A) = 0,362$$

$$P(SU) = 0,138$$

$$P(A \& SU) = 0,036$$

- » Care este probabilitatea ca o persoană extrasă la întâmplare să aibă studii universitare sau să fie de acord?
- »  $P(A \cup SU) = P(A) + P(SU) - P(A \cap SU)$
- »  $P(A \cup SU) = 0,326 + 0,136 - 0,036 = 0,464$

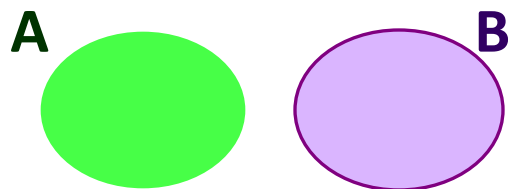
**Regula generală de adunare:**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

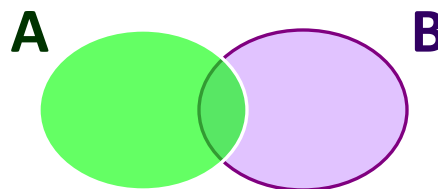
**Evenimente mutual exclusive  $P(A \cap B) = 0$**

**Probabilități: operații cu evenimente**

- » Evenimente mutual exclusive = evenimente care nu pot avea loc simultan
  - > Rezultatul obținut la aruncarea unei monede nu poate fi în același timp și cap și pajură
  - > Un student nu poate în același timp să treacă și să pice un examen
  - > O singură carte extrasă dintr-un pachet de cărți nu poate în același timp să fie și 3 și regină



$$P(A \cap B) = 0$$



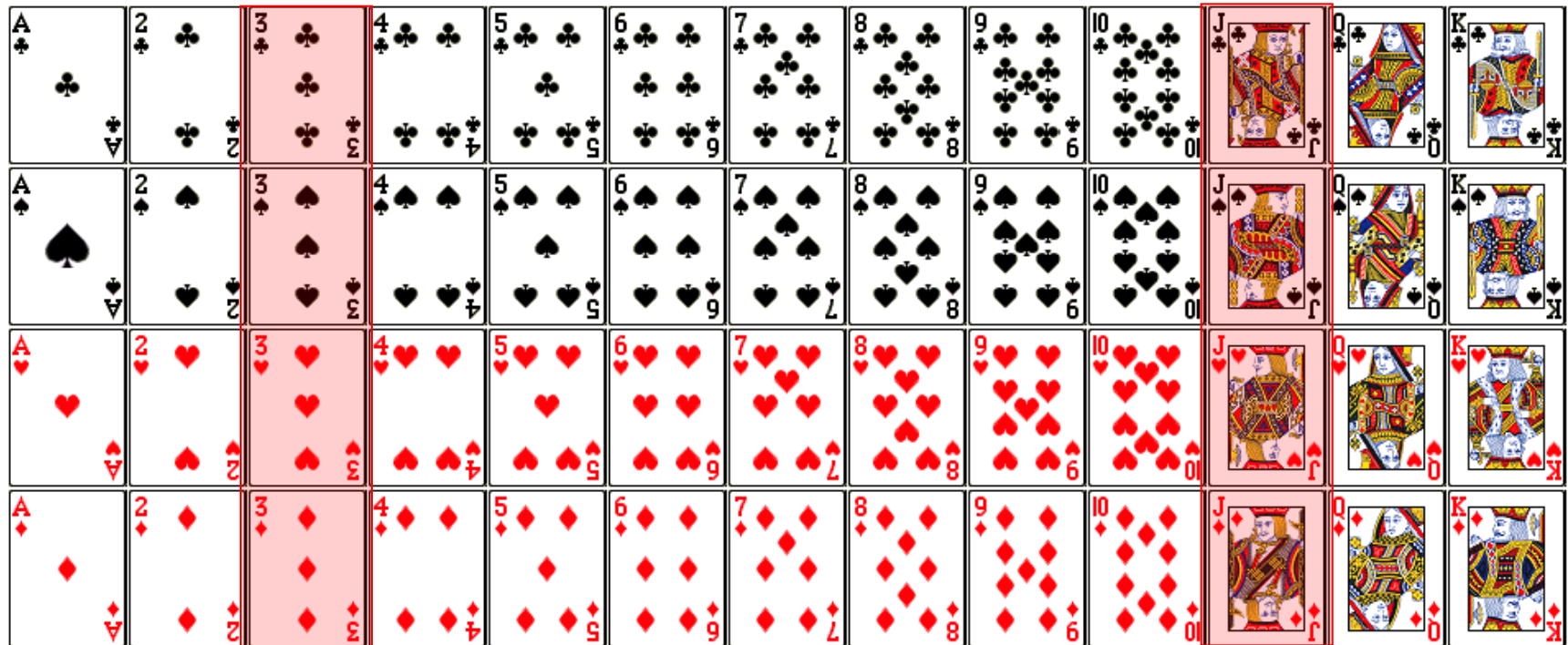
$$P(A \cap B) \neq 0$$

## Evenimente

Care este probabilitatea de a extrage dintr-un pachet de cărți de joc bine amestecat un J sau un 3?

Regula generală de adunare:  
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$   
Evenimente mutual exclusive  $P(A \cap B) = 0$

$$P(\text{J sau } 3) = P(\text{J}) + P(3) = 4/52 + 4/52 = 0,1538$$



**Evenimente mutual exclusive**

$\cup$  (reuniune) = SAU  
 $\cap$  (intersecție) = ȘI

$$P(A) = 0,362$$

$$P(SU) = 0,138$$

$$P(A \& SU) = 0,036$$

- » Evenimentul reprezentat de existența studiilor superioare este independent față de evenimentul reprezentat de acordul că bărbații ar trebui să aibă mai mult dreptul la un loc de muncă decât femeile?

**Produsul a două evenimente independente:**

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \& SU) = P(A) \times P(SU)$$

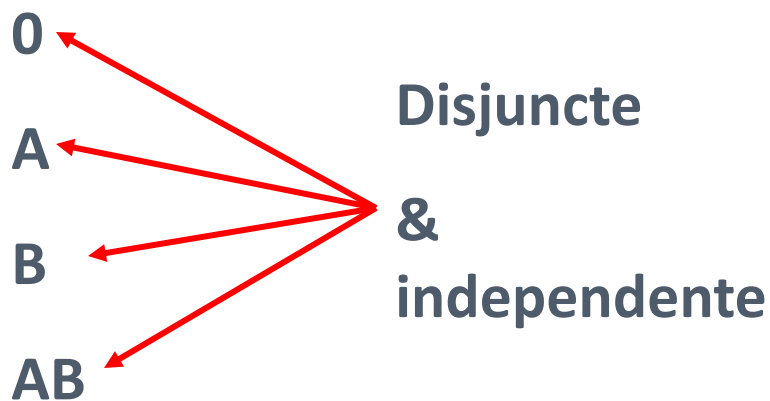
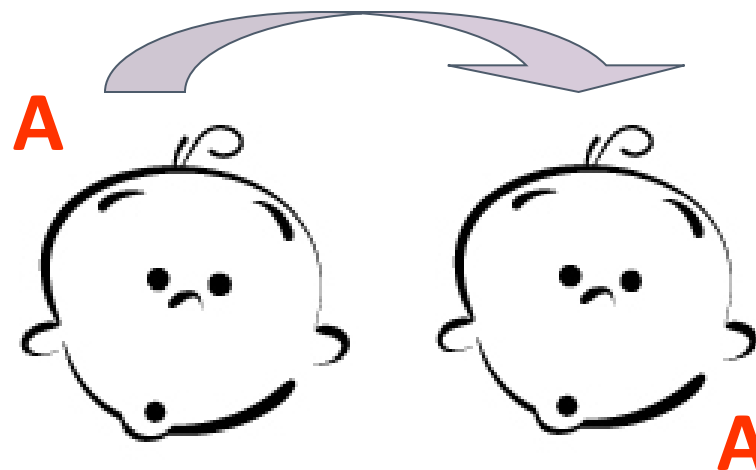
$$0,036 = 0,362 \times 0,138 \rightarrow$$

$0,036 \neq 0,05 \rightarrow$  evenimentele nu sunt independente

**Probabilități: operații cu evenimente**

- » Două evenimente sunt independente dacă cunoașterea rezultatului unui eveniment nu aduce nici o informație cu privire la rezultatul celui de-al doilea eveniment

$$P(A|B) = P(A)$$



Dependente /  
Independente

Sunt frați?

# Evenimente independente

	LDL		
	Valori normale	Valori patologice	Total
Diabet	20	100	120
Boli cardiovasculare	10	28	38
Accident vascular cerebral	32	65	97
Hipertensiune arteriala	8	37	45
Total	48	50	98

» Care este probabilitatea ca un diabetic să prezinte valori ale LDL patologice?

$$P(\text{Diabet \& LDL patologic}) = 100/120 = 0,83$$

» Care este probabilitatea ca un pacient cu valori LDL normale să prezinte accident vascular cerebral?

$$P(\text{LDL normal \& accident vascular cerebral}) = 32/48 = 0,67$$

## Probabilități condiționate

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- » Probabilități condiționate:
  - > Fie A și B două evenimente
  - > Prin probabilitatea condiționată a lui A de către B (simbol:  $Pr(A|B)$ ) se înțelege probabilitatea de a se realiza evenimentul A dacă în prealabil s-a realizat evenimentul B
- » Exemplu:  $Pr(\text{Test pozitiv tuberculină} | \text{TBC})$  este probabilitatea de a obține un test pozitiv la tuberculină la un pacient care are TBC.
- »  **$P(B|A)$**  nu este același lucru cu  **$P(A|B)$**

## Probabilități condiționate

	TBC+	TBC-
Test+	15	12
Test-	25	18

Fie evenimentele:

$$A = \{\text{TBC}+\}$$

$$B = \{\text{Test}+\}$$

»  $\Pr(A) = (15+25)/(15+12+25+18) = 0,57$  (prevalența bolii)

»  $\Pr(\text{non}A) = (12+18)/(15+12+25+18) = 0,43$

»  $\Pr(B|A) = \text{probabilitatea unui test pozitiv la un pacient cu TBC} = 15/(15+25) = 0,38 = \text{SENSIBILITATE (Se)}$

»  $\Pr(\text{non}B|\text{non}A) = \text{probabilitatea de a obține un test negativ știind că testul se aplică unui pacient indemn de TBC} = 18/(18+12) = 0,60 = \text{SPECIFICITATE (Sp)}$

## Probabilități condiționate



	Boală+	Boală -	Total
Test +	AP	FP	= AP+FP
Test -	FN	AN	= FN+AN
Total	= AP+FN	=FP+AN	= n

Denumire parametru	Formula
Rata falșilor pozitivi	$=FP/(FP+AN)$
Rata falșilor negativi	$=FN/(FN+AP)$
Sensibilitatea	$=AP/(AP+FN)$
Specificitatea	$=AN/(AN+FP)$
Acuratețea	$=(AP+AN)/n$
Valoarea predictivă pozitivă	$=AP/(AP+FP)$
Valoarea predictivă negativă	$=AN/(AN+FN)$
Riscul relativ	$=AP(FP+AN)/FN(AP+FP)$
Rata șansei	$=(AP \cdot AN)/(FN \cdot FP)$
Riscul atribuabil	$=AP/(AP+FP)-FN/(FN+AN)$

## Probabilități în tabelul de contingență

## Adunare:

»  $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$

»  $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$ : **evenimente mutual exclusive**

## Înmulțire:

»  $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B | A)$

»  $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$ : **evenimente independente**

# De reținut!

$A = \{\text{TAS mamă} > 140 \text{ mmHg}\}, \Pr(A) = 0,25$

$B = \{\text{TAS tată} > 140 \text{ mmHg}\}, \Pr(B) = 0,15$

Care este probabilitatea ca într-o familie să avem un părinte hipertensiv?

## Probabilități: Probleme

» Într-o cafenea există 20 de persoane; la 10 le place ceaiul, la alți 10 le place cafeaua și la 2 le place și ceaiul și cafeaua. Care este probabilitatea de a extrage la întâmplare din populație o persoană căreia să-i placă ceaiul **sau** cafeaua?

## Probabilități: Probleme

$A = \{\text{TAS mamă} > 140 \text{ mmHg}\}, \Pr(A) = 0,10$

$B = \{\text{TAS tată} > 140 \text{ mmHg}\}, \Pr(B) = 0,20$

$\Pr(A \cap B) = 0,05$

» Evenimentele A și B sunt dependente sau independente?

## Probabilități: Probleme