PROBABILITĂȚI
PRONBABILITĂȚI CONDIȚIONATE
VARIABILE ALEATOARE

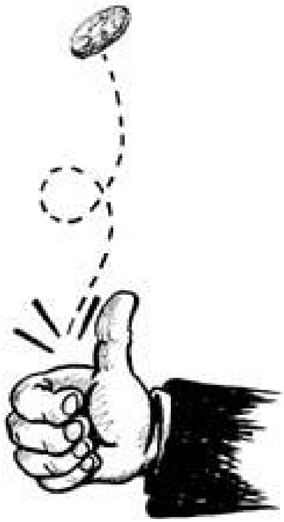
Sorana D. Bolboacă

DESPRE ...

- Experiment aleator
- Definiţia clasică a probabilităţii
- Spaţiul fundamental de evenimente
- Independenţa a două evenimente
- Probabilităţi condiţionată
  - Exemple medicale (Riscul relativ, Se, Sp, VPP, VPN, etc.)

Evenimentul aleatoriu

- Într-un proces randomizat ştim care rezultate sunt posibile dar nu ştim care din rezultatele posibile se va întâmpla



Evenimentul aleator

- La aruncarea cu moneda avem două rezultate posibile (cap sau pajură) asociate cu o probabilitate specifică (ex. 0,5)
  - Testul: aplicarea unui experiment
  - Evenimentul: rezultatul testului
  - Evenimentul aleator: evenimentul care se obţine la aplicarea unui singur test
  - Spaţiu de evenimente: {cap, pajură}

DEFINIȚII

- Experimentul: o activitate a cărui rezultat este necunoscut
- Evenimentul: rezultatul unui experiment
- Evenimentul elementar: apare ca rezultat al unui singur experiment
- Probabilitatea de apariție a unui eveniment ca urmare a unui experiment este egală cu raportul dintre numărul de cazuri favorabile și numărul de cazuri posibile
- Spațiul fundamental de evenimente (S): mulțimea tuturor rezultatelor posibile
  - Rezultate posibile la aruncarea unui zar: 1, 2, 3, 4, 5, 6
  - $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

SPAŢIUL DE EVENIMENTE

- Colecţie a tuturor rezultatelor posibile ale unui test
  - Dacă o familie are 2 copii, care este spaţiul de evenimente pentru genul (F/M) acestor copii?
  - S = {FF, FM, MF, MM}
- Distribuţia de probabilitate = listă a tuturor rezultatelor posibile ale unui spaţiu de eveniment şi probabilităţile asociate ale acestora

- La o singură aruncare a unei monede (Cap = C, Pajură = P)
  - S = {C, P}
  - Pr(C) = 0,5
  - Pr(P) = 0,5

» La aruncarea de două ori a unei monede (Cap = C, Pajură = P)
  - S = {CC, CP, PC, PP}
  - Pr(CC) = 0,25
  - Pr(CP) = 0,25
  - Pr(PC) = 0,25
  - Pr(PP) = 0,25

NOȚIUNI DE BAZĂ

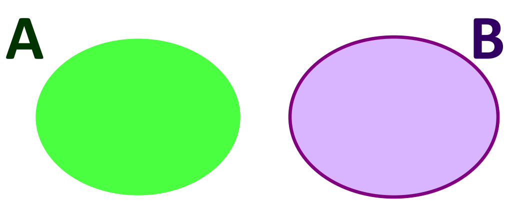
- **Reuniune (SAU):**
  - Simbol: $A \cup B$
    - Cel puțin unul din cele două evenimente
- **Intersecția (ȘI)**:
  - Probabilitatea ce eveneimentul A și B să apară în același timp
  - Simbol: $A \cap B$
    - Evenimentele A și B apar în același timp
- **Negația:**
  - Simbol: nonA

- Evenimentul complementar:
  - Complementul unui eveniment E în spațiul de evenimente S este setul tuturor evenimentelor din S care nu sunt incluse în E.
  - Simbol: $\overline{E}$
- Evenimentel mutual exclusive:
  - Două evenimente E_1 și E_2 cu spațiu de evenimente S sunt mutual exclusive dacă $E_1 \cap E_2$ nu are nici un rezultat în spațiu de evenimente S.
  - Aceste două evenimente nu pot avea loc simultan

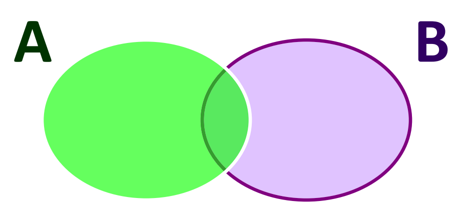
- Evenimente complementare = două evenimente mutual exclusive a căror sumă de probabilităţi este egală cu 1
  - **S = {C, P}: Pr(C)+Pr(P) = 0,5+0,5 = 1**
  - **S = {CC, CP, PC, PP}: Pr(CC)+Pr(nonCC) = 0,25+0,75 = 1**
- Evenimente disjuncte: spaţiul evenimentului poate avea mai mult de 2 rezultate posibile
- Evenimente complementare: spaţiul evenimentului poate avea doar 2 rezultate posibile

Evenimente Mutual Exclusive

- Evenimente mutual exclusive = evenimente care nu pot avea loc simultan
  - Rezultatul obţinut la aruncarea unei monede nu poate fi în acelaşi timp şi cap şi pajură
  - Un student nu poate în acelaşi timp să treacă şi să pice un examen
  - O singură carte extrasă dintr-un pachet de cărţi nu poate în acelaşi timp să fie şi 3 şi regină



$Pr(A \cap B) = 0$



$Pr(A \cap B) \neq 0$

PROBABILITATEA

- Probabilitatea = o măsură a şansei de realizare a unui eveniment
- $Pr(A) \in [0, 1]$ / $0 \leq P \leq 1$

- Fie A un eveniment:
  - Pr(A) = probabilitatea evenimentului A
  - Dacă evenimentul este o certitudine: $Pr(A) = 1$
  - Dacă evenimentul este imposibil de realizat: $Pr(A) = 0$
- Dacă un eveniment A se poate realiza în S probe dintr-o serie de n încercări echiprobabile, atunci probabilitatea evenimentului A este dată de numărul de cazuri favorabile raportat la numărul de cazuri posibile:

$$Pr(A) = (\text{nr cazuri favorabile})/(\text{nr. cazuri posibile})$$

PROBABILITATE vs. ŞANSĂ

- Şansele sunt probabilităţi exprimate procentual
- Şansa ia valori între 0% şi 100%
  - Exemplu: o probabilitate de 0,75 este egală cu o şansă de 75%
- Raţia unui eveniment este probabilitatea ca un eveniment să se întâmple împărţit la probabilitatea ca acel eveniment să nu se întâmple
  - Poate lua orice valoare pozitivă
  - Fie A evenimentul de interes. Raţia de probabilitate = Pr(A)/[1-Pr(A)] (unde 1-Pr(A) = Pr(nonA))
  - Exemplu: dacă Pr(A) = 0,75 atunci raţia de probabilitate este de 3 la 1 (0,75/(1-0,75)=0,75/0,25=3/1)

- La aruncarea unei monede de 10 ori, obţinem de fiecare dată cap (C). Care este probabilitatea ca la următoarea aruncare să obţinem tot cap?
  - 0,5
  - $< 0,5$
  - $> 0,5$

C, C, C, C, C, C, C, C, C, C, ?

- P(cap la prima aruncare) = P(cap la a zecea aruncare) = 0,5

PROBABILITATE vs. ȘANSĂ

- S-a realizat un studiu pe un eşantion de 7782 subiecţi din ţări şi s-au obţinut următoarele rezultate:
  - 36,2% din populaţia lumii au fost de acord cu următoarea propoziţie “Bărbaţii ar trebui să aibă mai mult dreptul la un loc de muncă decât femeile."
  - 13,8% din persoanele incluse în studiu aveau studii universitare
  - 3,6% din persoanele incluse în studiu îndeplineau simultan cele două criterii.

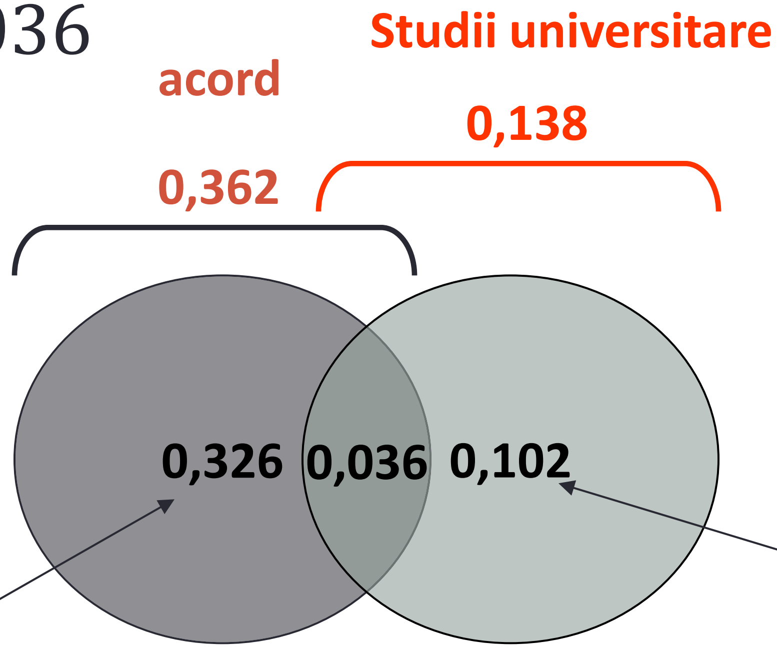
    Pr(acord) = 0,362 - Pr(SU) = 0,138 - P(acord & SU) = 0,036
- Evenimnetele “acord” (A) și “studii superioare” (SU) sunt independente?
  - P(A și SU) = 0,036 ≠ 0 → dependente

PROBABILITĂȚI: DIAGRAMA VENN

Pr(A) = 0,362

Pr(SU) = 0,138

Pr(A & SU) = 0,036



0,362 – 0,036 = 0,326

0,138 – 0,036 = 0,102

Sursa: http://www.worldvaluessurvey.org/

PROBABILITĂŢI: OPERAŢII CU EVENIMENTE

$Pr(A) = 0,362$
$Pr(SU) = 0,138$
$Pr(A \& SU) = 0,036$

$\cup$ (reuniune) = SAU
$\cap$ (intersecţie) = ŞI

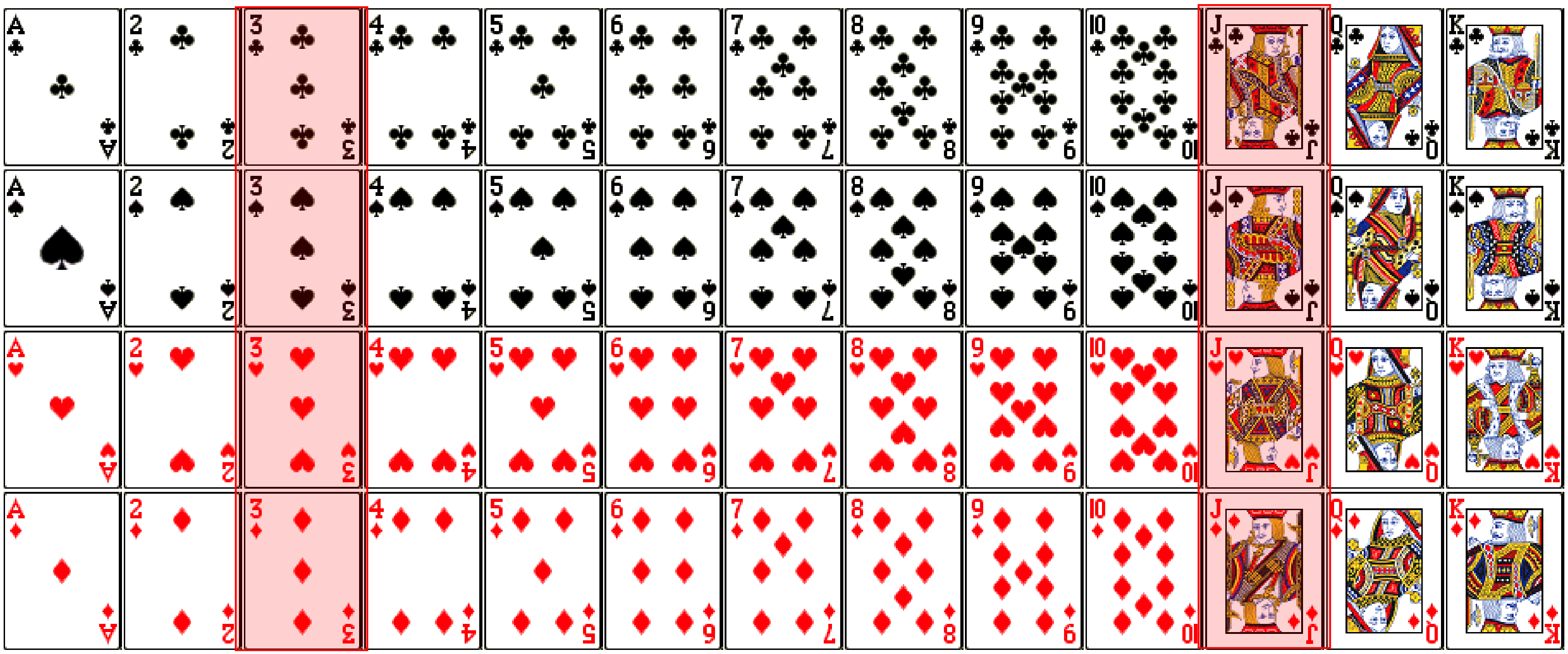
- Care este probabilitatea ca o persoană extrasă la întâmplare să aibă studii universitare sau să fie de acord?
- $Pr(A \cup SU) = Pr(A) + Pr(SU) - Pr(A \cap SU)$
- $Pr(A \cup SU) = 0,326 + 0,136 - 0,036 = 0,464$

Regula generală de adunare:
$Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cap B)$
Evenimente mutual exclusive $Pr(A \cap B) = 0$

Evenimente Mutual Exclusive

Regula generală de adunare:
$Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cap B)$
Evenimente mutual exclusive $Pr(A \cap B) = 0$

- Care este probabilitatea de a extrage dintr-un pachet de cărţi de joc bine amestecat un J sau un 3?
- **Pr(J sau 3) = Pr(J) + Pr(3) = 4/52 + 4/52 = 0,1538**



PROBABILITĂŢI: OPERAŢII CU EVENIMENTE

$\cup$ **(reuniune) = SAU**
$\cap$ **(intersecţie) = ŞI**

Pr(A) = 0,362
Pr(SU) = 0,138
Pr(A & SU) = 0,036

- Evenimentul reprezentat de existenţa studiilor superioare este independent faţă de evenimentul reprezentat de acordul că bărbaţii ar trebui să aibă mai mult dreptul la un loc de muncă decât femeile?

Produsul a două evenimente independente:
$Pr(A \cap B) = Pr(A) \times Pr(B)$

Pr(A & SU) = Pr(A) × Pr(SU)
0,036 = 0,362 + 0,138 →
0,036 ≠ 0,05 → evenimentele nu sunt independente

PROBABILITĂŢI: OPERAŢII CU EVENIMENTE

$\cup$ **(reuniune) = SAU**
$\cap$ **(intersecţie) = ŞI**

Pr(A) = 0,362
Pr(SU) = 0,138
Pr(A$\cap$SU) = 0,036

- Care este probabilitatea ca cel puţin unul din 5 persoane selectate la întâmplare să fie de acord cu propoziţia *Bărbaţii ar trebui să aibă mai mult dreptul la un loc de muncă decât femeile*?
- Pr(A) = 0,362 → S = {0, 1, 2, 3, 4, 5} → S = {0, cel puţin 1}
- Pr(cel puţin 1 din 5 să fie de acord)

  = 1 – Pr(nonA) ← Pr(nonA) = 1-Pr(acord) = 1-0,362 = 0,638

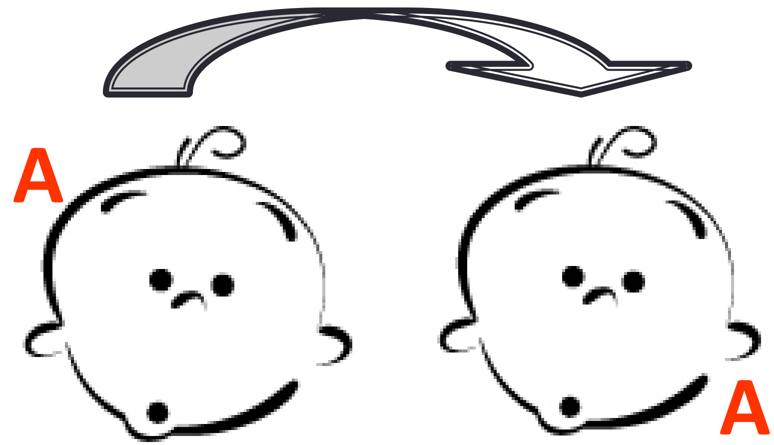
  = 1 – Pr(nonA, nonA, nonA, nonA, nonA)

  = 1 – $0{,}638^5$

  = 1 – 0,106 = 0,894

EVENIMENTE INDEPENDENTE

- Două evenimente sunt independente dacă cunoaşterea rezultatului unui eveniment nu aduce nici o informaţie cu privire la rezultatul celui de-al doilea eveniment
  - $Pr(A|B) = Pr(A)$



0

A

B

AB

Disjuncte

&

independente

Dependente / Independente

Sunt fraţi?

PROBABILITĂȚI CONDIȚIONATE

	LDL		
	Valori normale	Valori patologice	Total
Diabet	20	100	120
Boli cardiovasculare	10	28	38
Accident vascular cerebral	32	65	97
Hipertensiune arteriala	8	37	45
Total	70	230	300

» Care este probabilitatea valorilor LDL patologice?

Pr(LDL patologic) = 230/300 = 0,7667

» Care este probabilitatea accidentului vascular cerebral cu valori LDL crescute? Pr(AVC) = 97/300; Pr(LDL patologic) = 230/300

Pr(AVC$\cap$LDL patologic) = 65/300 = 0,2167

Probabilități Condiționate

	LDL		
	Valori normale	Valori patologice	Total
Diabet	20	100	120
Boli cardiovasculare	10	28	38
Accident vascular cerebral	32	65	97
Hipertensiune arteriala	8	37	45
Total	70	230	300

» Care este probabilitatea ca un diabetic să prezinte valori ale LDL patologice?

$$Pr(\text{Diabet} \cap \text{LDL patologic}) = 100/120 = 0{,}83$$

» Care este probabilitatea ca un pacient cu valori LDL normale să prezinte accident vascular cerebral?

$$P(\text{LDL normal} \cap \text{accident vascular cerebral}) = 32/70 = 0{,}4571$$

Probabilități Condiționate

- Probabilităţi condiţionate:
  - Fie A şi B două evenimente
  - Prin probabilitatea condiţionată a lui A de către B (simbol: Pr(A|B)) se înţelege probabilitatea de a se realiza evenimentul A dacă în prealabil s-a realizat evenimentul B
- Exemplu: Pr(Test pozitiv tuberculină|TBC) este probabilitatea de a obţine un test pozitiv la tuberculină la un pacient care are TBC.
- **P(B|A)** nu este acelaşi lucru cu **P(A|B)**

PROBABILITĂȚI CONDIȚIONATE

- Fie evenimentele

  A = {TBC+}

  B = {Test+}

	TBC+	TBC-
Test+	15	12
Test-	25	18

- Pr(A) = (15+25)/(15+12+25+18) = 0,57 (prevalenţa bolii)
- Pr(nonA) = (12+18) /(15+12+25+18) = 0,43
- Pr(B|A) = probabilitatea unui test pozitiv la un pacient cu TBC = 15/(15+25) = 0,38 = **SENSIBILITATE (Se)**
- Pr(nonB|nonA) = probabilitatea de a obţine un test negativ ştiind că testul se aplică unui pacient indemn de TBC = 18/(18+12) = 0,60 = **SPECIFICITATE (Sp)**

PROBABILITĂȚI CONDIȚIONATE

	Boală+	Boală -	Total
A +	AP	FP	= AP+FP
A -	FN	AN	= FN+AN
Total	= AP+FN	=FP+AN	= n

Denumire parametru	Formula
Rata falşilor pozitivi	=FP/(FP+AN)
Rata falşilor negativi	=FN/(FN+AP)
Sensibilitatea	=AP/(AP+FN)
Specificitatea	=AN/(AN+FP)
Acurateţea	=(AP+AN)/n
Valoarea predictivă pozitivă	=AP/(AP+FP)
Valoarea predictivă pozitivă	=AN/(AN+FN)
Riscul relativ	=AP(FP+AN)/FN(AP+FP)
Rata şansei	=(AP·AN)/(FN·FP)
Riscul atribuabil	=AP/(AP+FP)-FN/(FN+AN)

DE REȚINUT!

Adunare:

- $Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cap B)$
- $Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B)$: **evenimente mutual exclusive**

Înmulţire:

- $Pr(A \cap B) = Pr(A) \cdot Pr(B|A)$
- $Pr(A \cap B) = Pr(A) \cdot Pr(B)$: **evenimente independente**

TEMA PROBABILITĂȚI!

1.
A = {TAS mamă > 140 mmHg}, Pr(A) = 0,25
B = {TAS tată > 140 mmHg}, Pr(B) = 0,15
Care este probabilitatea ca într-o familie să avem un părinte hipertensiv?

2. Într-o cafenea există 20 de persoane; la 10 le place ceaiul, la alţi 10 le place cafeaua şi la 2 le place şi ceaiul şi cafeaua. Care este probabilitatea de a extrage la întâmplare din populaţie o persoană căreia să-i placă ceaiul **sau** cafeaua?

3.
A = {TAS mamă > 140 mmHg}, Pr(A) = 0,10
B = {TAS tată > 140 mmHg}, Pr(B) = 0,20
$Pr(A \cap B) = 0,05$

- Evenimentele A şi B sunt dependente sau independente?


Thank You
shift