Testarea ipotezelor statistice II: Medii

Sorana D. BOLBOACĂ

» Tipul variabilei şi alegerea testului statistic
» Intervalul de încredere-confidență vs. test statistic
» Teste pe medii:
  - 2 grupuri independente
  - 2 grupuri dependente
  - Mai mult de 2 grupuri

Despre ...

» Un eșantion de 50 studenți a fost întrebat câte ore învață în medie pe zi. Studenții din eșantion învață în medie 1,2 ore pe zi cu o deviație standard de 0,6. Datele sunt ușor asimetrice spre stânga. Estimați numărul adevărat de ore pe zi dedicate studiului utilizând intervalul de confidență de 95%?

n=50, media = 1,20, s=0,6

media±z*ES (ES = s/√n) → 1,20 ±1,96*0,07 → [1,06; 1,34]

→ Suntem 95% siguri că studenții învață în medie între 1,06 și 1,34 ore pe zi

Intervalul de confidență vs test statistic

» Un eșantion de 50 studenți a fost întrebat câte ore învață în medie pe zi. Studenții din eșantion învață în medie 1,2 ore pe zi cu o deviație standard de 0,6. Datele sunt ușor asimetrice spre stânga. Este această valoare semnificativ diferită de zero?

→ IC95% [1,06; 1,34] → Valoarea este semnificativ diferită de 0 deoarece valoarea 0 nu este cuprinsă în intervalul de încredere.

→ Test: H_0: $\mu = 0$ vs. H_1: $\mu \neq 0$

→ Z = (media-0)/ES = (1,20-0)/0,07 = 17,14 – $p < 0.00001$

→ Respingem ipoteza nulă cu un risc de eroare de 5%

Intervalul de confidență vs test statistic

Teste pe medii: 2 grupuri
Eșantioane independente
Eșantioane dependente

» Compararea a 2 populații (ex. Bolnav vs. Indemn de boală / Medicament nou vs. Placebo SAU Medicament cunoscut) prin investigarea a două eșantioane

» Nu avem nici un fel de informație despre parametrii populației (medie sau deviație standard)

Populația I

- **Medie necunoscută μ_1**
  - **Statistica eșantionului** $\bar{X}_1$

Populația II

- **Medie necunoscută μ_2**
  - **Statistica eșantionului** $\bar{X}_2$

Eșantioane independente

Eşantioane independente

» **Asumpții:**

1. Independența: observațiile din cele 2 eșantioane sunt independente
2. Distribuția normală: datele din fiecare eșantion urmează distribuția normală
3. Omogenitatea varianțelor:
   A. Nu există diferență semnificativă statistic între variante ⍰ Testul t (Student) pentru eșantioane independente sub asumpția egalității varianțelor
   B. există diferență semnificativă statistic între variante ⍰ Testul t (Student) pentru eșantioane independente sub asumpția inegalității varianțelor

- Scop: să determinăm dacă diferența dintre mediile eşantioanelor studiate indică o diferență reală între cele două populații sau dacă diferența obținută este datorată erorii de eşantionare.
  - De reținut! Dacă două eşantioane se extrag din aceeaşi populație şi la fiecare eşantion se administrează acelaşi tratament, pot exista diferențe între mediile celor două eşantioane
- **Paşi:**
  1. Formularea ipotezelor statistice:
     - A. Nulă: Nu există diferențe semnificative statistic între mediile celor două populații
     - B. Alternativă (test bilateral): Există diferențe semnificative statistic între mediile celor două populații

Eşantioane independente

Testarea egalității varianțelor se face cu testul LEVENE sau BARTLETT (teste bazate pe statistica F)

Dacă varianțele nu sunt semnificativ statistic diferite (p>0,05) atunci pot fi considerate egale → test student penttru eşantioane independente varianțe egale

» **Paşi:**

2. Alegerea nivelului de semnificație: α = 0,05
3. Alegerea testului statistic: testul student pentru eşantioane independente
4. Calcularea statisticii testului

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

$$s = \sqrt{\left[(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2\right]/(n_1 + n_2 - 2)}$$

Varianțe egale

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

$$d' = \frac{\left(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2\right)^2}{\left(s_1^2/n_1\right)^2/(n_1 - 1) + \left(s_2^2/n_2\right)^2/(n_2 - 1)}$$

Varianțe ne-egale

5. Concluzia statistică

Eşantioane independente

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Vârsta şi cancerul de prostată

Biopsie	media	s	n
Negativă	66,59	8,21	206
Pozitivă	67,14	7,88	95

- »H_0: vârsta medie a subiecților cu biopsie pozitivă nu diferă semnificativ de vârsta medie a subiecților cu biopsie negativă ($\mu_1 = \mu_2$)
- »H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$
- »$\alpha = 0,05 \rightarrow t_{critic} = 1,96$
- »$t=(m_1-m_2)/\sqrt{}(s_1^2/n_1+s_2^2/n_2)$
- »t=(67,14-66,69)/sqrt(7,88^2/95+8.21^2/206) = 0,45
- »Regiunea critică: (-∞; -1,96] U [1,96; ∞)
- »$1,96 \leq 0,45 \leq 1,96 \rightarrow$ nu există dovezi pentru a respinge H_0
- »Pentru eşantionale de volum mai mare de 100 diferența dintre statistica Z şi t este foarte mică în timp ce valorile p sunt identice

Eșantioane independente & varianțe ne-egale

Sorana D. BOLBOACĂ

Acidul uric la femei şi bărbați cu diabet

»H_0: media acidului uric a subiecților de gen feminin nu diferă semnificativ de medie acidului uric a subiecților de gen masculin ($\mu_1 = \mu_2$)

»H_1 (test bilateral): $\mu_1 \neq \mu_2$

	M	F
Media	5	4
Variația	2	2
n	16	16

$$s = \sqrt{\frac{(16-1)\cdot 2 + (16-1)\cdot 2}{16+16-2}} = \sqrt{\frac{60}{30}} = 1{,}41$$

$$t = \frac{5-4}{\sqrt{1{,}41\cdot\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)}} = 1{,}68$$

df = n_1+n_2-2 =16+16-2=30; α = 0.05 $(-\infty;-2{,}04]\cup[2{,}04;+\infty)$

Concluzia:

Deoarece statistica testului (1,68) nu aparție regiunii critice putem concluziona că nu există dovezi suficiente pentru a respinge ipoteza nulă ➔ media acidului uric nu diferă semnificativ statistic la pacienții diabetici de gen feminin comparativ cu pacienții de gen masculin

Eșantioane independente & varianțe ne-egale

- Compararea valorilor medii ale unei caracteristici cantitative continue măsurată pe acelaşi eşantion în două momente diferite (înainte de tratament – la 3 luni de la inițierea tratamentului) sau pe două eşantioane perechi
- Denumirea testului: testul student pe eşantioane peechi
- **Asumpții**:
  - Observațiile individuale din primul eşantion corespund unei perechi în cel de-al doilea eşantion
  - Diferența dintre perechile de valori urmează distribuția normală

Eşantioane dependente

Paired t Test

Denote the test statistic $\overline{d}/\left(s_d/\sqrt{n}\right)$ by t, where s_d is the sample standard deviation of the observed differences:

$$s_d = \sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2 \Big/ n\right] \Big/ (n-1)}$$

n = number of matched pairs

If $t > t_{n-1,1-\alpha/2}$ or $t < -t_{n-1,1-\alpha/2}$

then H_0 is rejected.

If $-t_{n-1,1-\alpha/2} \le t \le t_{n-1,1-\alpha/2}$

Figure 8.1 Acceptance and rejection regions for the paired *t* test

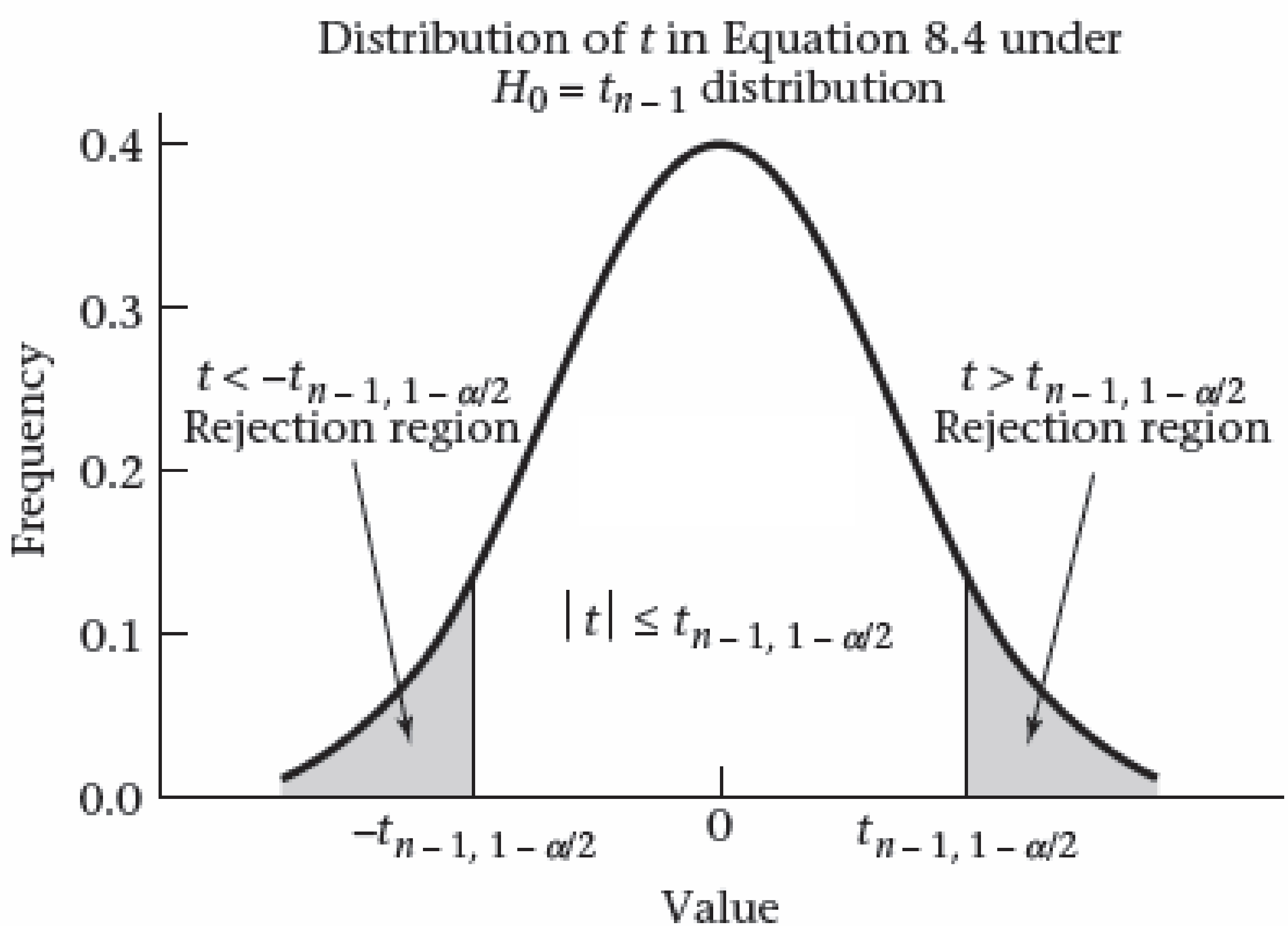

Table 2: The values of blood pressures and heart rates prior to and after the treatment with metoprolol and nebivolol in the study

	Total (n = 60)	**Metoprolol** (n = 30)	**Nebivolol** (n = 30)	P **value**
Systolic blood pressure (mm/Hg)				
Before	152.1 ± 4.9	151.3 ± 3.6	152.8 ± 5.9	0.27**
After	136.4 ± 10.9	134.9 ± 10.5	137.8 ± 11.3	0.3**
P value	<0.001*	<0.001*	<0.001*	
Diastolic blood pressure (mm/Hg)				
Before	91.7 ± 3.9	91.1 ± 3.7	92.3 ± 4.1	0.25**
After	82.6 ± 7.1	82.4 ± 6.7	82.7 ± 7.3	0.87**
P value	<0.001*	<0.001*	<0.001*	
Heart rate (pulse/min)				
Before	75.7 ± 5.7	75.2 ± 5.7	76.2 ± 5.7	0.5**
After	70.2 ± 5.4	70.3 ± 5.8	70.1 ± 5.1	0.87**
P value	<0.001*	<0.001*	<0.001*	
Achieved targeted blood pressure (n, %)	37 (61.6)	19 (63.3)	18 (60)	0.5***

*Paired t-test; **independent samples t-test; ***chi-square test.

http://www.hindawi.com/journals/tswj/2013/608683/tab2/

Teste pe medii: exemple

» Pentru compararea mediilor pe două grupuri utilizăm testul Z sau t

- H_0: $\mu_1 = \mu_2$

» Compararea mediilor pe mai mult de 2 grupuri se face prin testul de analiză a varianțelor (ANOVA), statistica testului fiind statistica F

» ANOVA

- H_0: Media este aceeaşi în toate grupurile:

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$$

k = număr de grupuri

- H_A: Cel puțin într-un caz media dintre 2 grupuri este semnificativ diferită
- Dacă statistica F este mare, valoarea p este mică
- Dacă valoarea p este suficient de mică atunci H_0 se respinge, şi concluzionăm că avem suficiente evidențe care să susțină existența unei diferențe semnificative statistic între mediile populațiilor

Compararea a mai mult de 2 medii

» Condiții de aplicare a testului ANOVA:
- Independența:
  - În cadrul grupurilor: observațiile din acelaşi grup sunt independente
  - Între grupuri: grupurile sunt independente unul față de celălalt
- Distribuția normală: datele fiecărui grup urmează distribuția normală
- Varianțe egale: grupurile nu au variațe semnificativ diferite

Compararea a mai mult de 2 medii

» **Colesterolul total şi clasa indicelui de masă corporală**

	Mean	StDev	n
healthy weight	183	29	56
overweight	187	37	50
obesity	212	35	55
overall	**194**	**36**	**161**

» H_0: Media colesterolului este aceeaşi între clasele IMC

➔ $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

Effect	SS	Degr. of Freedom	MS	F	p
Intercept	6041798	1	6041798	5349.605	0.000000
BMI class	26990	2	13495	11.949	0.000015
Error	178444	158	1129		

Compararea a mai mult de 2 medii

» **Colesterolul total şi clasa indicelui de masă corporală**

	Mean	StDev	n
healthy weight	183	29	56
overweight	187	37	50
obesity	212	35	55
overall	**194**	**36**	**161**

» Deoarece p (BMI class) < 0.05 (p = 0.000015) → avem suficiente evidențe a diferenței mediei colesterolului între cel puți două clase de IMC

Effect	SS	Degr. of Freedom	MS	F	p
Intercept	6041798	1	6041798	5349.605	0.000000
BMI class	26990	2	13495	11.949	0.000015
Error	178444	158	1129		

» Care clase de IMC sunt diferite? Teste **Post-Hoc**

Bonferroni test; variable Cholesterol (Spreadsheet4)
Probabilities for Post Hoc Tests
Error: Between MS = 1129.4, df = 158.00

Cell No.	BMI class	{1} 183.09	{2} 186.82	{3} 211.96
1	healthy weight		1.000000	0.000035
2	overweight	1.000000		0.000556
3	obesity	0.000035	0.000556	

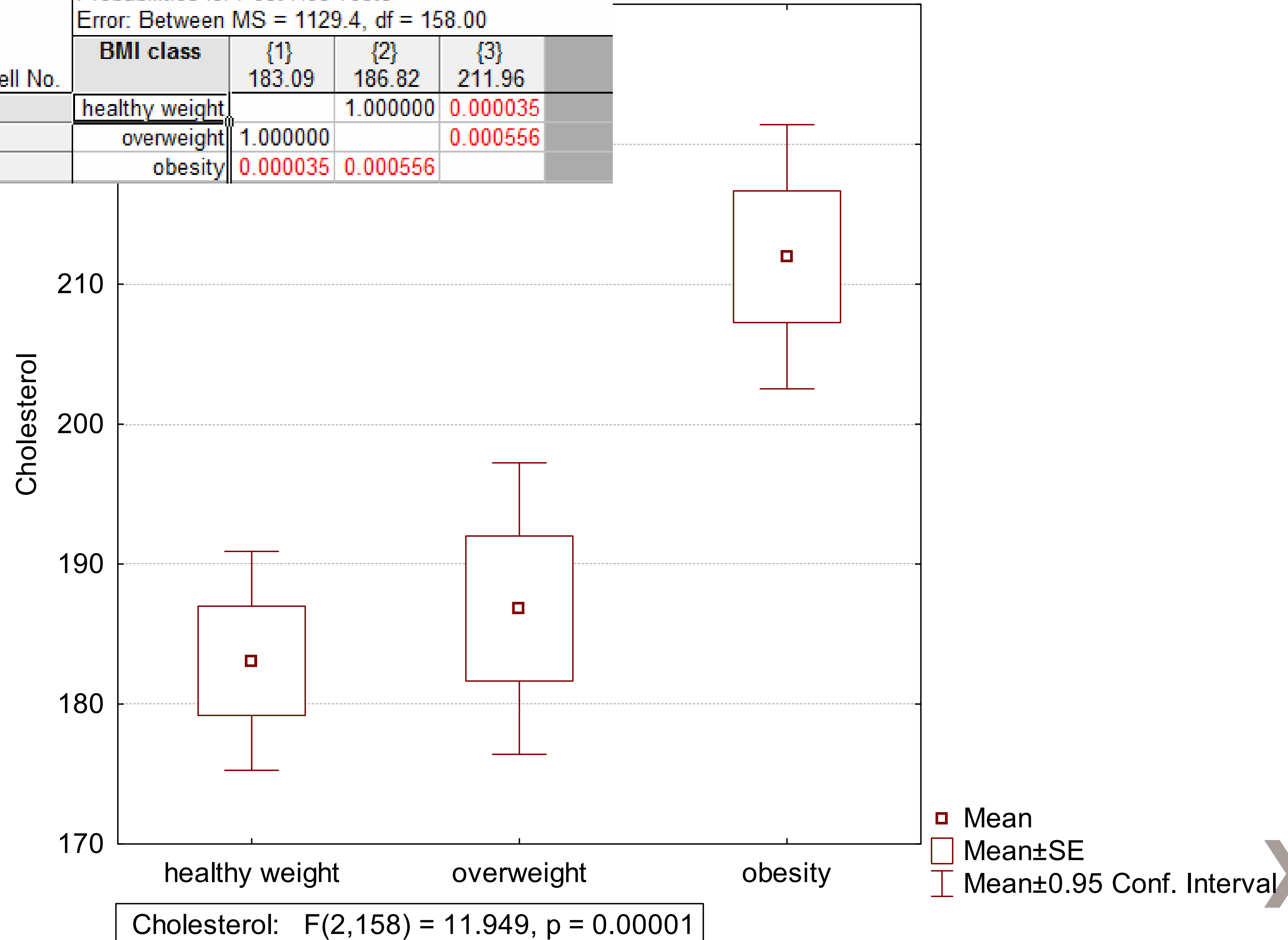

Tabla II *Comparación según estado nutricional*					
Características	*Bajo peso (n = 5) 3,27%*	*Normopeso (n = 94) 61,44 %*	*Sobrepeso (n = 42) 27,45%*	*Obesidad (n = 12) 7,84%*	*Valor de P*
Edad	19,40±3,130	20,12±2,75	20,02±2,19	20,58±6,08	0,121
IMC	17,67±0,64	22,65±1,67	26,92±1,36	32,64±2,04	0,000
Contorno Cintura	74,60±10,74	82,30±6,76	91,72±7,65	99,56±9,10	0,000
Colesterol	182,02±35,91	189,99±33,59	195,77±33,64	215,12±34,81	0,108
Triglicéridos	62,60±10,92	75,36±25,67	78,67±29,72	76,11±20,28	0,613
cHDL	51,76±16,50	47,66±11,39	42,42±9,07	43,90±6,14	0,057
cLDL	117,74±30,55	127,34±24,26	136,34±31,72	148,75±26,08	0,051
Glicemia	89,80±7,16	92,68±8,24	92,95±7,32	96,50±6,16	0,330
Presión Sistólica	105,00 ± 8,66	103,78±13,29	107,86±11,16	115,00±12,08	0,021
Presión Diastólica	64,00 ± 8,94	65,00±8,55	68,69±8,34	71,25±6,34	0,025

Los valores mostrados como media ±SD. Los valores de p < 0, 05 son considerados estadísticamente significativos.

1822 Nutr Hosp. 2015;32(4):1820-1824 Pedro Delgado Floody y cols.

Testul ANOVA: exemplu

	Parametric	Non-Parametric
Distribuția	Normală	oricare
Varianța	Omogene	oricare
Scala de măsură	Rație / Interval	oricare
Valoarea centrală	Media	mediana
Dispersia	Deviația standard	(Q1; Q3)

	Parametric	Non-Parametric
2 grupuri independente	Independent t-test	Mann-Whitney
2 grupuri dependente	Paired t-test	Wilcoxon test
> 2 grupuri	ANOVA	Kruskal-Wallis test Friedman's ANOVA
Corelația	Pearson	Spearman, Kendall, etc.
…	…	…

Test parametric vs. Test neparametric

De reținut!

- Nu orice test statistic se poate aplica pe orice tip de variabilă!
- Când se aplică un anumit test?
- Cum se calculează statistica testului?
- Cum interpretăm un test statistic!
- Testele parametrice se aplică doar dacă datele urmează distribuția normală!