

# **TESTE STATISTICE III: COMPARAREA VARIABIELOR CALITATIVE**

# Despre ... teste neparametrice pe variabile calitative

- Testul Hi-pătrat
- Testul Fisher exact
- Testul McNemar
- Testul Z pentru frecvențe
  - 2 frecvențe observate

Testele utilizate pentru compararea variabilelor calitative sunt teste neparametrice (nu necesită nici o asumție cu privire la distribuția datelor)

# Testul Hi-pătrat ( $\chi^2$ ) – Chi-Square

- 2 variabile calitative & fiecare variabilă cu cel puțin 2 categorii
- **National Longitudinal Study of Adolescent Health ([Add Health](#))**:
  - Statele Unite ale Americii – includerea în studiu a adolescenților s-a realizat în anul școlar 1994-1995 – subiecții au fost urmăriți ca și adulți tineri (4 interviuri – ultimul în 2008 – vârsta subiecților 24-32 ani)
  - Adultul tânăr: s-a urmărit obezitate (IMC > 30) și starea civilă

	căsătorit	necăsătorit	Total
obezitate +	147	184	331
obezitate -	277	685	962
Total	424	869	1293

- **Există o relație între obezitate și starea civilă?**

# Testul Hi-pătrat ( $\chi^2$ )

	căsătorit	necăsătorit	Total
obezitate +	147	184	331
obezitate -	277	685	962
Total	424	869	1293

**Există o relație între obezitate și starea civilă?**

- Ipoteze statistice:
  - $H_0$ : Obezitatea și starea civilă sunt independente
  - $H_1$ : Obezitatea și starea civilă sunt dependente
- Evaluarea ipotezelor:
  - Cuantificăm cât de diferite sunt valorile observate față de cele așteptate/teoretice
  - Diferențe mari dintre valorile așteptate/teoretice și cele observate furnizează dovezi puternice în favoarea ipotezei alternative

# Testul Hi-pătrat ( $\chi^2$ )

	căsătorit	necăsătorit	Total
obezitate +	147	184	331
obezitate -	277	685	962
Total	424	869	1293

**Există o relație între obezitate și starea civilă?**

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r \cdot c} \frac{(f_i^o - f_i^t)^2}{f_i^t}$$

$\chi^2$  = statistica  $\chi^2$

$f_i^o$  = frecvența observată

$f_i^t$  = frecvența teoretică

r = numărul de rânduri





c = numărul de coloane

df (grade de libertate) =  $(r-1) \cdot (c-1)$

## Condiții de aplicare

1. Independența – observațiile trebuie să fie independente (dacă eșantionarea se face fără înlocuire  $n < 10\%$  din populație)
2. Fiecare celulă din tabelul teoretic trebuie să conțină cel puțin 5 observații

# Testul Hi-pătrat ( $\chi^2$ )

Observat	căsătorit	necăsătorit	Total
obezitate +	 147	 184	331
obezitate -	 277	 685	962
Total	424	869	1293 ( <b>n</b> )

$$\text{valoarea expectată} = \frac{(\text{total rând}) \cdot (\text{total coloană})}{n}$$

Așteptat	căsătorit	necăsătorit	Total
obezitate +	$=331 \cdot 424 / 1293$ <b>=109</b>	$=331 \cdot 869 / 1293$ <b>=222</b>	<b>331</b>
obezitate -	$=962 \cdot 424 / 1293$ <b>=315</b>	$=962 \cdot 869 / 1293$ <b>=647</b>	<b>962</b>
Total	<b>424</b>	<b>869</b>	<b>1293</b>

# Testul Hi-pătrat ( $\chi^2$ )

<b>Observat</b>	căsătorit	necăsătorit
obezitate +	147	184
obezitate -	277	685

<b>Expectat</b>	căsătorit	necăsătorit
obezitate +	<b>109</b>	<b>222</b>
obezitate -	<b>315</b>	<b>647</b>

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r \cdot c} \frac{(f_i^o - f_i^t)^2}{f_i^t}$$

$$\chi^2 = (147-109)^2/109 + (184-222)^2/222 + (277-315)^2/315 + (685-647)^2/647$$

$$\chi^2 = 26,57$$

$$p = 1,79 \cdot 10^{-7} \rightarrow \text{respingem } H_0$$

Putem însă să tragem concluzia că obezitatea este determinată de căsătorie?

Dacă  $\chi^2 \in [3,84, \infty)$  se respinge  $H_0$  cu un risc de eroare de tip I ( $\alpha$ ).

Dacă  $\chi^2 \notin [3,84, \infty)$  nu se respinge  $H_0$  cu un risc de eroare de tip II ( $\beta$ ).

# Testul Hi-pătrat ( $\chi^2$ )

- Testul Hi pătrat este valid dacă cel puțin 80% dintre frecvențele probabile depășesc 5 și toate frecvențele probabile depășesc 1
- Regula se aplică frecvențelor expectate/teoretice, nu celor observate
- Dacă criteriul nu este satisfăcut → se aplica corecția Yates (corecție de continuitate)



# Testul Hi-pătrat ( $\chi^2$ ): Corelția Yates

- Dacă volumul de eșantion este mic, testul Hi-pătrat are tendința să respingă  $H_0$  identificând diferențe acolo unde nu există
- Corecția Yates: micșorarea cu 0,5 unități a diferenței dintre frecvența observată și cea teoretică în cadrul numărătorului lui  $\chi^2$  (din formulă) înainte de ridicarea la pătrat; astfel, valoarea lui  $\chi^2$  scade

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r \cdot c} \frac{(|f_i^o - f_i^t| - 0,5)^2}{f_i^t}$$

## Aplicarea corecției

- duce la scăderea valorii  $\chi^2$ 
  - ➔ șansele ca ipoteza nulă să fie respinsă ↓ ↓
  - ➔ riscul erorii de tipul I (respingerea ipotezei nule atunci când aceasta este în fapt veridică) ↓ ↓
- crește riscul erorii de tipul II (acceptarea unei false ipoteze atunci când ea este în fapt falsă).

# Testul exact Fisher

- = alternativă a testului Hi-pătrat în examinarea asociațiilor în cadrul unui tabel de contingență, atunci când frecvențele așteptate/teoretice/expectate sunt mici.
- Se aplică când:
  - Frecvența așteptată/expectată/teoretică  $< 2$
  - $> 20\%$  din frecvențele așteptată/expectată/teoretică  $< 5$

$$p = \frac{(AP + FN)!(FP + AN)!(FN + AN)!(AP + FP)!}{n!AP!FP!FN!AN!}$$

- Valoarea  $p$  asociată testului Fisher exact este suma dintre valoarea  $p$  calculată pe tabelul observat și respectiv valoarea  $p$  calculată pe tabelul teoretic
- Valoarea  $p$  asociată parametrului ne dă probabilitatea ca valoarea observată de independență să fie atribuită doar șansei.
- O valoare  $p$  mică indică faptul că există alte cauze decât șansa care influențează rezultatul și astfel cele două variabile investigate nu sunt independente

# Testul exact Fisher

<b>Observat</b>	Carii+	Carii-	Total
fumat+	<b>6</b>	<b>2</b>	8
fumat-	<b>1</b>	<b>6</b>	7
Total	7	8	15

<b>Teoretic</b>	carii+	carii-	Total
fumat+	<b>7</b>	<b>1</b>	8
fumat-	<b>0</b>	<b>7</b>	7
Total	7	8	15

- Se calculează valorile p pentru fiecare tabel în parte:

$$p_1 = \frac{7!8!7!8!}{15!6!2!1!6!} = 0,0305 \quad p_2 = \frac{7!8!7!8!}{15!7!1!0!7!} = 0,0012$$

- $p = p_1 + p_2 = 0,0305 + 0,0012 = 0,0317$
- $p = 0,0317 < \alpha = 0,05 \Rightarrow$  fumatul este asociat cu caria dentară
- Dar, determină fumatul apariția cariilor dentare?

$$RR = \frac{AP/(AP + FP)}{FN/(FN + AN)} = \frac{6/8}{1/7} = 5,25$$

# Testul McNemar

- Se aplică pentru a evalua semnificația dintre două frecvențe corelate (aceeași populație în două momente diferite sau două eșantioane cu potrivire – *matched-paire sample*)

<b>Observat</b>	Durere post T+	Durere post T-	Total
Durere inițial+	<b>130</b>	<b>520</b>	650
Durere inițial-	<b>70</b>	<b>280</b>	350
Total	200	800	1000

- Suntem interesați doar dacă persoanele care inițial aveau durere post tratament nu mai au durere și respectiv cele care inițial nu aveau durere dar post tratament au durere. Această modificare a durerii este sau nu întâmplătoare?

# Testul McNemar

$$\chi^2 = \frac{(FP - FN)^2}{FP + FN}$$

<b>Observat</b>	Durere post T+	Durere post T-	Total
Durere inițial+	130	<b>320</b>	450
Durere inițial-	<b>240</b>	210	450
Total	370	530	900

$$\chi^2 = \frac{(320 - 240)^2}{320 + 240} = \frac{6400}{560} = 11,43$$

$$p = 0,0008$$

- Suntem interesați doar dacă persoanele care inițial aveau durere post tratament nu mai au durere și respectiv cele care inițial nu aveau durere dar post tratament au durere. Această modificare a durerii este sau nu întâmplătoare?
- $H_0$ : Tratamentul nu are impact asupra durerii
- $H_A$ : Tratamentul are impact asupra durerii

# Testul Z pentru frecvențe

## 2 frecvențe observate

- Condiții de aplicare:
  - $n_1$  &  $n_2 > 30$

$$z = \frac{(f_1 - f_2)}{\sqrt{f(1-f)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$$

$$f = \frac{f_1 n_1 + f_2 n_2}{n_1 + n_2}$$

# Testul Z pentru frecvențe

- S-a studiat statutul HIV pe un eșantion de 170 femei cu vârste cuprinse între 18 și 40 de ani din Moldova, și respectiv un eșantion de 89 femei cu vârste cuprinse între 18 și 40 de ani din Transilvania. Pentru eșantionul din Moldova, frecvența testelor HIV+ a fost de 10% în eșantionul din Moldova și 2,7% în eșantionul din Transilvania. Frecvența infecției cu HIV la femeile cu vârste cuprinse între 18 și 40 de ani din Moldova este diferită față de frecvența infecției la femeile de aceeași vârstă din Transilvania?

**Datele problemei:**  $p_1 = 0,10$ ;  $p_2 = 0,027$ ;  $n_1 = 170$ ;  $n_2 = 89$ .

**$H_0$ :** Nu există diferență semnificativă statistic între frecvența infecției HIV la femeile din Moldova față de frecvența infecției HIV la femeile din Transilvania.

**$H_A$ :** Există diferență semnificativă între frecvența infecției HIV la femeile din Moldova față de frecvența infecției HIV la femeile din Transilvania.

# Testul Z pentru frecvențe

$$z = \frac{(f_1 - f_2)}{\sqrt{f(1-f) \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

**Pragul de semnificație:**  $\alpha = 0,05$ .

**Regiunea critică:**

- Testul bilateral:  $(-\infty; -1,96] \cup [1,96; \infty)$
- Testul unilateral:  $[1,645, \infty)$
- 2,118 aparține regiunii critice  $\rightarrow$  respingem  $H_0$

$$f = \frac{f_1 n_1 + f_2 n_2}{n_1 + n_2}$$

$$z = \frac{(f_1 - f_2)}{\sqrt{f \cdot (1-f) \cdot \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} = \frac{0,10 - 0,027}{\sqrt{0,075 \cdot (1 - 0,075) \cdot \left( \frac{1}{170} + \frac{1}{89} \right)}}$$

$$z = \frac{0,073}{\sqrt{0,075 \cdot 0,925 \cdot (0,006 + 0,011)}} = \frac{0,073}{\sqrt{0,001}} = \frac{0,073}{0,034} = 2,118$$



**AIM:** To determine whether there are gender differences in the epidemiological profile of atrial fibrillation (AF) and to characterise the clinical, biochemical, and therapeutic factors associated with AF.

### **Gender differences**

Table 2 shows the differences between the men and the women in epidemiological, biochemical, BP and therapeutic characteristics. The women exhibited more obe-

**Table 2 Epidemiological, clinical and therapeutic differences between genders (mean  $\pm$  SD) *n* (%)**

	<b>Females (<i>n</i> = 542)</b>	<b>Males (<i>n</i> = 486)</b>	<b><i>P</i> value</b>
Mean age, yr	72.7 $\pm$ 5.8	72.8 $\pm$ 5.8	NS
Abdominal circumference, cm	96.6 $\pm$ 11.8	100.4 $\pm$ 11.0	< 0.001
Weight, kg	71.4 $\pm$ 11.5	79.5 $\pm$ 11.5	< 0.001
Mean height, cm	155.2 $\pm$ 6.7	166.7 $\pm$ 6.7	< 0.001
BMI	29.6 $\pm$ 4.5	28.6 $\pm$ 3.6	< 0.001
Obesity	224 (41.4)	160 (32.9)	0.005
Years from the onset of HT	11.0 $\pm$ 8.2	10.8 $\pm$ 8.1	NS
Diabetes mellitus	134 (24.7)	150 (30.9)	0.03
Dyslipidaemia	267 (49.3)	230 (47.3)	NS
Smokers	17 (3.1)	76 (15.6)	< 0.001
Sedentariness	352 (70.5)	274 (56.4)	< 0.001
Regular alcohol intake	5 (0.9)	33 (6.8)	< 0.001

**Table 1. Characteristics of obese and not obese participants.**

	<b>Not Obese (N = 377,220) N (%)</b>	<b>Obese (N = 122,284) N (%)</b>	<b>P value*</b>
<b>Age (years)</b>			
31–40	31,493 (8.3)	8,508 (7.0)	<0.001
41–50	105,116 (27.9)	32,691 (26.7)	
51–60	152,997 (40.6)	52,308 (42.8)	
≥61	87,614 (23.2)	28,777 (23.5)	
<b>Gender</b>			
Female	207,664 (55.1)	64,326 (52.6)	<0.001
Male	169,556 (44.9)	57,958 (47.4)	
<b>Alcohol consumption</b>			
Never	27,556 (7.3)	12,552 (10.3)	<0.001
Occasionally	38,371 (10.2)	19,219 (15.8)	
1–3 per month	39,228 (10.4)	16,382 (13.4)	
1–2 per week	96,831 (25.7)	31,919 (26.2)	
3–4 per week	91,836 (24.4)	23,173 (19.0)	
Daily	82,646 (22.0)	18,700 (15.3)	
Missing	752	339	
<b>Hypertension</b>			
No	293,635 (78.1)	69,271 (56.9)	<0.001
Yes	82,356 (21.9)	52,481 (43.1)	
Missing	1,229	532	
<b>Diabetes</b>			
No	363,790 (96.8)	107,486 (88.5)	<0.001
Yes	12,090 (3.2)	13,997 (11.5)	
Missing	1,340	801	

N number.

\*chi square test for gender, hypertension and diabetes, chi-square test for trend for remainder.

# De reținut!

- Aplicarea corectă a unui test pe frecvențe se face după verificarea asumpțiilor testului care se dorește a fi aplicat
- Testul Hi-pătrat se poate aplica pe orice tabel de contingență de  $c$
- Atenție la condițiile de aplicare a testului Hi-pătrat, a testului Hi-pătrat corectat, Fisher exact sau McNemar!

# MULȚUMESC PENTRU ATENȚIE!



Claude Bernard

In a word, I consider hospitals only as the entrance to scientific medicine; they are the first field of observation which a physician enters; but the true sanctuary of medical science is a laboratory; only there can he seek explanations of life in the normal and pathological states by means of experimental analysis.

AZ QUOTES