

PROBABILITĂȚI

- » Experiment aleator
- » Definiția clasică a probabilității
- » Spațiul fundamental de evenimente
- » Independența a două evenimente
- » Probabilități condiționate

Exemple medicale (Riscul relativ, Se, Sp, VPP, VPN, etc.)

Cuprins



- » Într-un proces randomizat știm care rezultate sunt posibile dar nu știm care din rezultatele posibile se va întâmpla



Evenimentul aleatoriu

- » La aruncarea cu moneda avem două rezultate posibile (capul sau pajura) asociate cu o probabilitate specifică (ex. 0,5)

Testul: aplicarea unui experiment

Evenimentul: rezultatul testului

Evenimentul aleator: evenimentul care se obține la aplicarea unui singur test

Spațiu de evenimente: {cap, pajură}



Evenimentul aleatoriu



» Colecție a tuturor rezultatelor posibile ale unui test

Dacă o familie are 2 copii, care este spațiul de evenimente pentru genul (F/M) acestor copii?

$$+ S = \{FF, FM, MF, MM\}$$

» Distribuția de probabilitate = listă a tuturor rezultatelor posibile ale unui spațiu de eveniment și probabilitățile asociate ale acestora

» La o singură aruncare a unei monede (Cap = C, Pajură = P)

$$S = \{C, P\}$$

$$P(C) = 0,5$$

$$P(P) = 0,5$$

» La aruncarea de două ori a unei monede (Cap = C, Pajură = P)

$$S = \{CC, CP, PC, PP\}$$

$$P(CC) = 0,25$$

$$P(CP) = 0,25$$

$$P(PC) = 0,25$$

$$P(PP) = 0,25$$

Definiții



- » Evenimente complementare = două evenimente mutual exclusive a căror sumă de probabilități este egală cu 1
- » $S = \{C, P\} - P(C)+P(P) = 0,5+0,5 = 1$
- » $S = \{CC, CP, PC, PP\} - P(CC)+P(\text{nonCC}) = 0,25+0,75 = 1$
- » Evenimente disjuncte – spațiul evenimentului poate avea mai mult de 2 rezultate posibile
- » Evenimente complementare – spațiul evenimentului poate avea doar 2 rezultate posibile

Definiții



- » Probabilitatea = o măsură a șansei de realizare a unui eveniment
- » $\Pr(A) \in [0, 1] / 0 \leq P \leq 1$

- » Fie A un eveniment:
 - $\Pr(A)$ = probabilitatea evenimentului A
 - Dacă evenimentul este o certitudine: $\Pr(A) = 1$
 - Dacă evenimentul este imposibil de realizat: $\Pr(A) = 0$
- » Dacă un eveniment A se poate realiza în S probe dintr-o serie de n încercări echiprobabile, atunci probabilitatea evenimentului A este dată de numărul de cazuri favorabile raportat la numărul de cazuri posibile:
 - $$\Pr(A) = (\text{nr cazuri favorabile}) / (\text{nr cazuri posibile})$$

Probabilitatea



»Șansele sunt probabilități exprimate procentual

»Șansa ia valori între 0% și 100%

Exemplu: o probabilitate de 0,75 este egală cu o șansă de 75%

»Rația unui eveniment este probabilitatea ca un eveniment să se întâmple împărțit la probabilitatea ca acel eveniment să nu se întâmple

Poate lua orice valoare pozitivă

Fie A evenimentul de interes. Rația de probabilitate = $\Pr(A)/[1-\Pr(A)]$ (unde $1-\Pr(A) = \Pr(\text{non}A)$)

Exemplu: dacă $\Pr(A) = 0,75$ atunci rația de probabilitate este de 3 la 1 ($0,75/(1-0,75)=0,75/0,25=3/1$)

Șansa



» La aruncarea unei monede de 10 ori, obținem de fiecare dată cap (C). Care este șansa ca la următoarea aruncare să obținem tot cap?

0,5

< 0,5

> 0,5

C, ?

» $P(\text{cap la prima aruncare}) = P(\text{cap la a zecea aruncare}) = 0,5$

Probabilitatea



- » S-a realizat un studiu pe un eșantion de 7782 subiecți din țări și s-au obținut următoarele rezultate:

36,2% din populația lumii au fost de acord cu următoarea propoziție "Bărbații ar trebui să aibă mai mult dreptul la un loc de muncă decât femeile."

13,8% din persoanele incluse în studiu aveau studii universitare

3,6% din persoanele incluse în studiu îndeplineau simultan cele două criterii.

$$P(\text{acord}) = 0,362 - P(\text{SU}) = 0,138 - P(\text{acord} \& \text{SU}) = 0,036$$

- » Evenimnetele "acord" (A) și "studii superioare" (SU) sunt independente?
- » $P(A \text{ și } SU) = 0,036 \neq 0 \rightarrow$ dependente

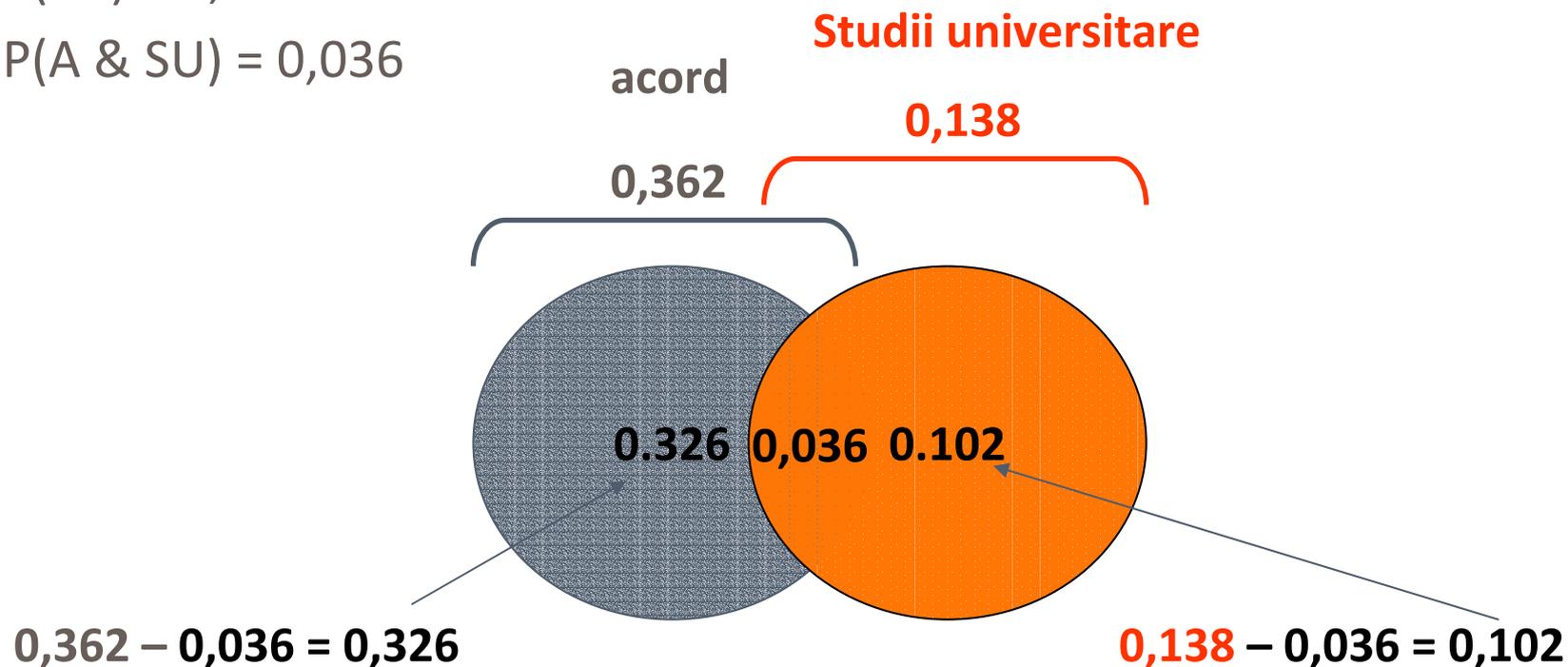
Probabilități: exemplu



$$P(A) = 0,362$$

$$P(SU) = 0,138$$

$$P(A \& SU) = 0,036$$



Probabilități: diagrama Venn

\cup (reuniune) = SAU
 \cap (intersecție) = ȘI

$$P(A) = 0,362$$

$$P(SU) = 0,138$$

$$P(A \& SU) = 0,036$$

- » Care este probabilitatea ca o persoană extrasă la întâmplare să aibă studii universitare sau să fie de acord?
- » $P(A \cup SU) = P(A) + P(SU) - P(A \cap SU)$
- » $P(A \cup SU) = 0,326 + 0,136 - 0,036 = 0,464$

Regula generală de adunare:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Evenimente mutual exclusive $P(A \cap B) = 0$

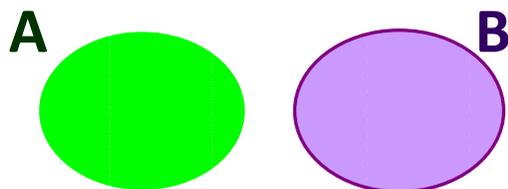
Probabilități: operații cu evenimente

» Evenimente mutual exclusive = evenimente care nu pot avea loc simultan

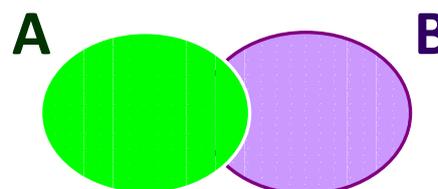
Rezultatul obținut la aruncarea unei monede nu poate fi în același timp și cap și pajură

Un student nu poate în același timp să treacă și să pice un examen

O singură carte extrasă dintr-un pachet de cărți nu poate în același timp să fie și 3 și regină



$$P(A \cap B) = 0$$



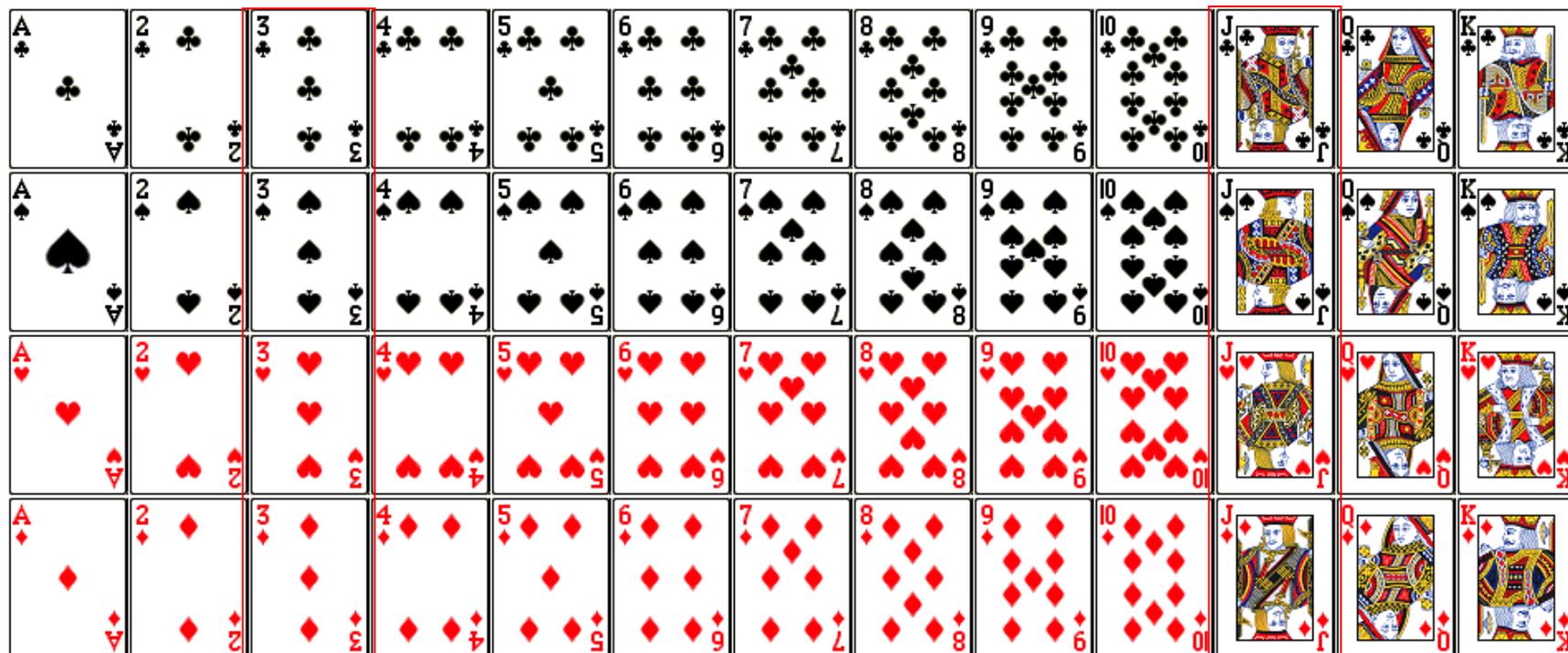
$$P(A \cap B) \neq 0$$

Evenimente

Care este probabilitatea de a extrage dintr-un pachet de cărți de joc bine amestecat un J sau un 3?

Regula generală de adunare:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Evenimente mutual exclusive $P(A \cap B) = 0$

$$P(\text{J sau } 3) = P(\text{J}) + P(3) = 4/52 + 4/52 = 0,1538$$



Evenimente mutual exclusive

\cup (reuniune) = SAU
 \cap (intersecție) = ȘI

$$P(A) = 0,362$$

$$P(SU) = 0,138$$

$$P(A \& SU) = 0,036$$

- » Care este probabilitatea ca o persoană extrasă la întâmplare să nu aibă studii universitare și să nu sunt de acord?
- » $P(\text{non}A \cap \text{non}SU) = 1 - P(A \cup SU)$
- » $P(\text{non}A \cap \text{non}SU) = 1 - 0,464 = 0,536$

Probabilități: operații cu evenimente



15

$$P(A) = 0,362$$

$$P(SU) = 0,138$$

$$P(A \& SU) = 0,036$$

\cup (reuniune) = SAU

\cap (intersecție) = ȘI

- » Evenimentul reprezentat de existența studiilor superioare este independent față de evenimentul reprezentat de acordul că bărbații ar trebui să aibă mai mult dreptul la un loc de muncă decât femeile?

Produsul a două evenimente independente:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A \& SU) = P(A) \times P(SU)$$

$$0,036 = 0,362 \times 0,138 \rightarrow$$

$0,036 \neq 0,05 \rightarrow$ evenimentele nu sunt independente

Probabilități: operații cu evenimente

$$P(A) = 0,362$$

$$P(SU) = 0,138$$

$$P(A \& SU) = 0,036$$

\cup (reuniune) = SAU

\cap (intersecție) = ȘI

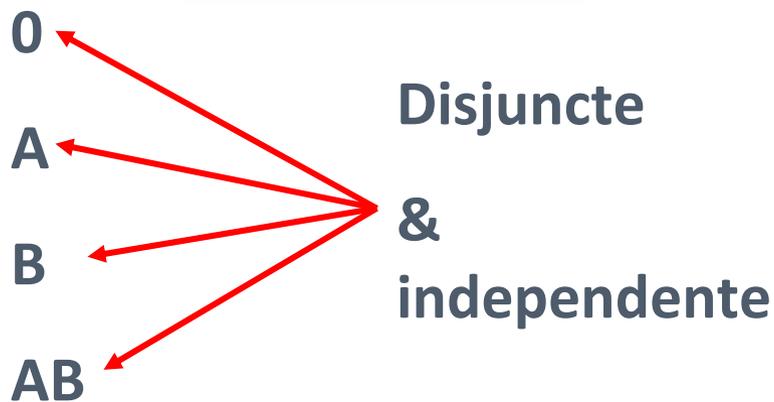
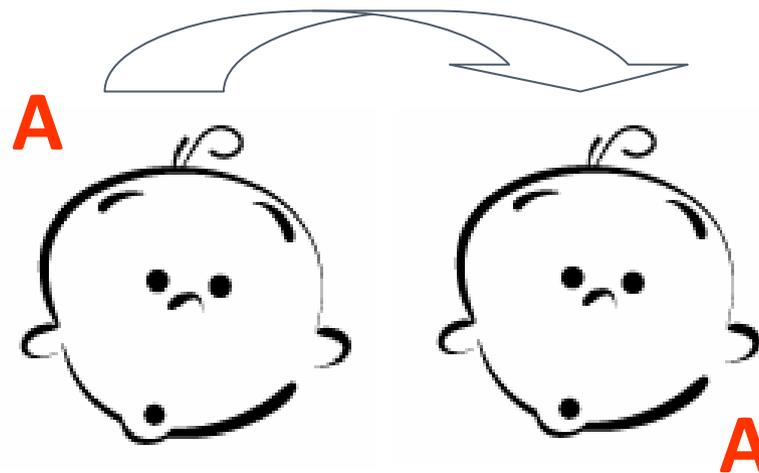
- » Care este probabilitatea ca cel puțin unul din 5 persoane selectate la întâmplare să fie de acord cu propoziția *Bărbații ar trebui să aibă mai mult dreptul la un loc de muncă decât femeile?*
- » $P(A) = 0,362 \rightarrow S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow S = \{0, \text{cel puțin } 1\}$
- » $P(\text{cel puțin } 1 \text{ din } 5 \text{ să fie de acord})$
 - $= 1 - P(\text{non}A) \leftarrow P(\text{non}A) = 1 - P(\text{acord}) = 1 - 0,362 = 0,638$
 - $= 1 - P(\text{non}A, \text{non}A, \text{non}A, \text{non}A, \text{non}A)$
 - $= 1 - 0,638^5$
 - $= 1 - 0,106 = 0,894$

Probabilități: operații cu evenimente



- » Două evenimente sunt independente dacă cunoașterea rezultatului unui eveniment nu aduce nici o informație cu privire la rezultatul celui de-al doilea eveniment

$$P(A|B) = P(A)$$



Dependente /
Independente

Sunt frați?

Evenimente independente

Goodman E, Amick BC, Rezendes MO, Levine S, Kagan J, Rogers WH, Tarlov AR. Adolescents' understanding of social class: a comparison of white upper middle class and working class youth. J Adolesc Health. 2000;27(2):80-3.

- » Opinia tinerilor albi de 16 ani cu privire la clasa socială (48 clasa muncitoare & 50 clasa marginală)
- » Evaluarea clasei sociale pe baza ocupației, studiilor și a venitului prin chestionarea părinților (evaluare obiectivă)
- » Pe baza unui chestionar completat de tineri (evaluare subiectivă)

	Obiectiv		Total
	Muncitoare	Marginală	
Subiectiv			
Jos	0	0	0
Muncitoare	8	0	8
Mijloc	32	13	45
Marginală	8	37	45
Sus	0	0	0
Total	48	50	98

Probabilități condiționate



	Obiectiv		Total
	Muncitoare	Marginală	
Subiectiv			
Jos	0	0	0
Muncitoare	8	0	8
Mijloc	32	13	45
Marginală	8	37	45
Sus	0	0	0
Total	48	50	98

- » Care este probabilitatea ca clasa socială evaluată obiectiv (O) să fie clasa marginală (Ma)?
- » $P(\text{Obj Ma}) = 50/97 = 0,51$

Probabilități marginale

	Obiectiv		Total
	Muncitoare	Marginală	
Subiectiv			
Jos	0	0	0
Muncitoare	8	0	8
Mijloc	32	13	45
Marginală	8	37	45
Sus	0	0	0
Total	48	50	98

- » Care este probabilitatea ca clasa socială evaluată obiectiv (Obj) și subiectiv (Sub) să fie ambele clasa marginală (Ma)?
- » $P(\text{SubMa}) = 45/98$
- » $P(\text{ObjMa}) = 50/98$
- » $P(\text{SubMa și ObjMa}) = 37/98 = 0,38$

Probabilități condiționate

	Obiectiv		Total
	Muncitoare	Marginală	
Subiectiv			
Jos	0	0	0
Muncitoare	8	0	8
Mijloc	32	13	45
Marginală	8	37	45
Sus	0	0	0
Total	48	50	98

- » Care este probabilitatea ca un adolescent din clasa muncitoare (evaluată obiectiv) să fie clasificat în clasa marginală la clasificarea subiectivă?
- » $P(\text{SubMa}) = 45/98$
- » $P(\text{ObjMu}) = 48/98$
- » $P(\text{ObjMu} | \text{SubMa}) = 8/48 = 0,17$

Probabilități condiționate

» Probabilități condiționate:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Fie A și B două evenimente

Prin probabilitatea condiționată a lui A de către B (simbol: $Pr(A|B)$) se înțelege probabilitatea de a se realiza evenimentul A dacă în prealabil s-a realizat evenimentul B

» Exemplu: $Pr(\text{Test pozitiv tuberculină} | \text{TBC})$ este probabilitatea de a obține un test pozitiv la tuberculină la un pacient care are TBC.

» **$P(B | A)$** nu este același lucru cu **$P(A | B)$**

Probabilități condiționate



	TBC+	TBC-
Test+	15	12
Test-	25	18

Fie: $A = \{TBC+\}$ & $B = \{Test+\}$

- » $Pr(A) = (15+25)/(15+12+25+18) = 0,57$ (prevalența bolii)
- » $Pr(\text{non}A) = (12+18)/(15+12+25+18) = 0,43$
- » $Pr(B|A) =$ probabilitatea unui test pozitiv la un pacient cu TBC = $15/(15+25) = 0,38 =$ **SENSIBILITATE (Se)**
- » $Pr(\text{non}B|\text{non}A) =$ probabilitatea de a obține un test negativ știind că testul se aplică unui pacient indemn de TBC = $18/(18+12) = 0,60 =$ **SPECIFICITATE (Sp)**

Probabilități condiționate



Fie: $A = \{TBC+\}$ & $B = \{Test+\}$

	TBC+	TBC-
Test+	15	12
Test-	25	18

» $Pr(A | B)$ = probabilitatea ca o persoană cu TBC să prezinte un test pozitiv = $15/(15+12) = 0,56 =$ **VALOAREA PREDICTIVĂ POZITIVĂ (VPP)**

» $Pr(\text{non}A | \text{non}B)$ = probabilitatea ca o persoană indemnă TBC să prezinte un test negativ = $18/(18+25) = 0,42 =$ **VALOAREA PREDICTIVĂ NEGATIVĂ (VPN)**

Probabilități condiționate



	TBC+	TBC-
Test+	15	12
Test-	25	18

Fie: $A = \{\text{TBC}+\}$ & $B = \{\text{Test}+\}$

» Rata falșilor pozitivi: $\text{RFP} = \Pr(B | \text{non}A)$

» Rata falșilor negativi: $\text{RFN} = \Pr(\text{non}A | B)$

Probabilități condiționate



	Boală+	Boală -	Total
Test +	AP	FP	= AP+FP
Test -	FN	AN	= FN+AN
Total	= AP+FN	=FP+AN	= n

Denumire parametru	Formula
Rata falșilor pozitivi	$=FP/(FP+AN)$
Rata falșilor negativi	$=FN/(FN+AP)$
Sensibilitatea	$=AP/(AP+FN)$
Specificitatea	$=AN/(AN+FP)$
Acuratețea	$=(AP+AN)/n$
Valoarea predictivă pozitivă	$=AP/(AP+FP)$
Valoarea predictivă negativă	$=AN/(AN+FN)$
Riscul relativ	$=AP(FP+AN)/FN(AP+FP)$
Rata șansei	$=(AP \cdot AN)/(FN \cdot FP)$
Riscul atribuabil	$=AP/(AP+FP)-FN/(FN+AN)$

Probabilități în tabelul de contingență

Adunare:

» $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$

» $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$: **evenimente mutual exclusive**

Înmulțire:

» $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B | A)$

» $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$: **evenimente independente**

De reținut! Operații cu probabilități



$A = \{\text{TAS mamă} > 140 \text{ mmHg}\}, \Pr(A) = 0,25$

$B = \{\text{TAS tată} > 140 \text{ mmHg}\}, \Pr(B) = 0,15$

Care este probabilitatea ca într-o familie să avem un părinte hipertensiv?

Probabilități: Probleme



- » Într-o cafenea există 20 de persoane; la 10 le place ceaiul, la alți 10 le place cafeaua și la 2 le place și ceaiul și cafeaua. Care este probabilitatea de a extrage la întâmplare din populație o persoană căreia să-i placă ceaiul **sau** cafeaua?

Probabilități: Probleme



$A = \{\text{TAS mamă} > 140 \text{ mmHg}\}, \Pr(A) = 0,10$

$B = \{\text{TAS tată} > 140 \text{ mmHg}\}, \Pr(B) = 0,20$

$\Pr(A \cap B) = 0,05$

» Evenimentele A și B sunt dependente sau independente?

Probabilități: Probleme

